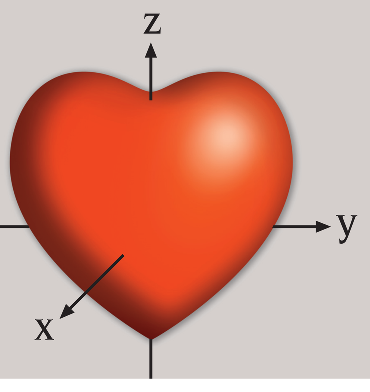
»Form & Formel«

TEIL I



Länge, Strecke, Gerade, Maß, Einheit.
Die Grundform des Maßes ist die gerade Linie.

Ursprünglich dienten als **Maßeinheiten** menschliche Maße, wie zum Beispiel:
die **Elle**,
der **Fuß** oder **Schuh**,
die **Armspanne** oder das **Klafter**
und der **Schritt**.
Da solche Maße sich von Mensch zu Mensch unterscheiden, wurden sie verbindlich festgelegt. Dies geschah durch die öffentliche Anbringung **markierter Stäbe**.

1.1 Am **Regensburger Rathaus** konnte sich jeder Bürger diese verbindlichen, am Ort üblichen Maßeinheiten z. B. mit einer Knotenschnur abnehmen.

Regional unterschiedliche Fußmaße wurden oft als **Durchschnittsmaß** verschiedener Personen festgelegt.

1.2 Wir ermitteln das Maß des **Bildungsbereichs-Fußes** über die dreimalige Halbierung einer Schnur der Gesamtlänge von acht (2^3) Füßen.

1.3 Weniger demokratisch ermittelt wurde die altägyptische **Königselle**, die Jahrhunderte lang auf 52,36 cm festgelegt war.

Beliebige Längen konnten in Zahlwerten angegeben und verrechnet werden, indem man **ganzzahlige Unterteilungen bzw. Vielfache dieser Einheiten bildete**.

Die Umrechnung einer Einheit in eine andere ist schwierig, auch wenn diese aufeinander abgestimmt sind.
Das ist z. B. bei inch (in) und feet (ft) in Bezug auf den Zentimeter (cm) der Fall. Es gelten die folgenden exakten Umrechnungsverhältnisse: 762 cm = 300 in = 25 ft.
Bei einer Teilung durch 6 stellt sich jedoch die Frage: 127 cm = 50 in = 4,?? ft.

1.4 **Das vierfüßige Schneidermaßband** zeigt den Sachverhalt.

Das Verhältnis verschiedener Maße zueinander bezeichnet man als Proportion.

1.5 **Der Steuerbescheid** behält auch nach mehrmaligem mittigem Durchtrennen das DIN A-Format, da dessen Seitenverhältnis

$1 : \sqrt{2} = 1{,}414...$

wegen $1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} / 2 : 1$ immer gleich bleibt.

Ein weiteres Beispiel einer Proportion ist der **Goldene Schnitt**. Er spielt eine zentrale Rolle in der abendländischen Malerei, Bildhauerei und Architektur, da er eine harmonische Proportion beschreibt: Eine Strecke wird dergestalt in eine kleinere (lat. **minor**) und eine größere (**major**) unterteilt, dass die kleinere zur größeren im gleichen Verhältnis steht wie die größere zur gesamten.

Mathematisch lässt sich der Goldene Schnitt in verschiedenen Formeln darstellen:

Das Verhältnis ist exakt $1 : 0{,}5\,(\sqrt{5} + 1)$.

Die Zahl $0{,}5\,(\sqrt{5} + 1) = 1{,}61803\ldots$ wird mit „τ“ bezeichnet.

Es gilt auch Folgendes: $\tau = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}}$

Ebenso wie diese **Kettenwurzel** führt auch die **Fibonacci-Folge**, die nach einem der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters benannt ist, zum „Goldenen Verhältnis“.
Sie beginnt mit zwei Einsen und jedes Folgeglied ist die Summe der beiden vorherigen.
In mathematischer Schreibweise: $f_n = f_{n\text{-}1} + f_{n\text{-}2}$.

Die Folge lautet somit: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 ...
Die Verhältnisse zweier Nachbarwerte nähern sich dabei dem „Goldenen Verhältnis“ immer weiter an:
$34 : 21 = \underline{1{,}61}904...$; $89 : 55 = \underline{1{,}618}18...$; $233 : 144 = \underline{1{,}6180}5...$

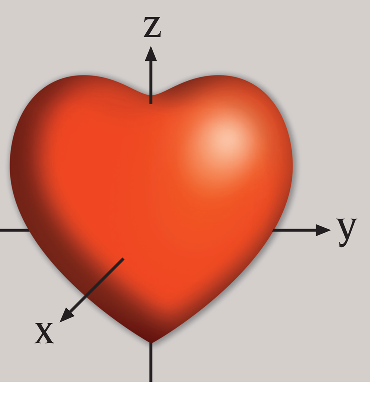
1.6 **Mit dem Proportionszirkel**, dessen mittlere Spitze die Strecke zwischen den beiden äußeren immer im Goldenen Schnitt teilt, kann die Annäherung der Streckenverhältnisse an das „Goldene Verhältnis“ auf der **Fibonacci-Skala** nachgeprüft werden.

1.7 **Der Turm des Freiburger Münsters** ist 210 Ellen (à 54 cm) hoch und wird durch die Galerie auf 130 Ellen Höhe recht genau im Goldenen Schnitt in Unterbau und Turmhelm unterteilt (210 : 130 = 1,615…).

1.8 **Auf den Euro-Banknoten** ist der Goldene Schnitt ebenfalls nachweisbar.

»Form & Formel«

TEIL 2



Vertikale, Horizontale, Dreieck, Kreis, Trigonometrie. Die Ebene und ihre Grundformen: das Dreieck und der Kreis.

Drei Punkte bilden ein Dreieck und definieren eine Ebene.
Jedes Dreieck kann durch die Dreieckshöhe in zwei **rechtwinklige Dreiecke** zerlegt werden. Im rechten Winkel stehen die Seiten so zueinander, wie das **vertikale Senklot** und die **Horizontale**.

Zwei Entdeckungen mögen dies verdeutlichen:

2.1 **Die Senk- oder Setzwaage** mit einem beweglichen Lot, eine Vorläuferin der **Wasserwaage**, kann an einer **Schlauchwaage** justiert bzw. überprüft werden.

2.2 **Eine 12-Knoten-Schnur**, die im Verhältnis 3 : 4 : 5 zum Dreieck aufgespannt wird, bildet zwischen den beiden kürzeren Seiten einen rechten Winkel. Das war schon den Ägyptern in vorchristlicher Zeit bekannt.

Die Erklärung liefert der **Lehrsatz des Pythagoras** $a^2+b^2=c^2$, hier $3^2+4^2=5^2$. Er besagt, **dass jedes Dreieck rechtwinklig ist, dessen Quadrate über den kürzeren Seiten zusammen die gleiche Fläche haben wie das Quadrat über der längsten Seite**.

2.3 **Die griechische Briefmarke** von 1955 illustriert diesen Sachverhalt.

Ebenfalls rechtwinklig sind die Dreiecke mit Seitenverhältnissen von 5 : 12 : 13 wegen $5^2 + 12^2 = 13^2$ und 8 : 15 : 17 wegen $8^2 + 15^2 = 17^2$.

2.4 **Das Klappdreieck** zeigt, dass der fixierte rechte Winkel außer dem 3 : 4 : 5-Verhältnis auch diese beiden Seitenverhältnisse erlaubt.

Eine weitere wichtige Figur in der Ebene ist der **Kreis**. **Er ist auf einer Ebene als diejenige Menge von Punkten P definiert, die zu einem Mittelpunkt M den gleichen Abstand (Radius r) haben**.

2.5 **Die Kreisscheibe** illustriert die Kreisgleichung $r^2 = x^2 + y^2$ für einen Ursprungskreis **k** mit Radius r = 5 und mit den rechtwinklig aufeinander stehenden Variablen x und y . An den Kreispunkten **A**, **B**, **C**, **D** und **E** wird beispielhaft gezeigt, dass ein Punkt **P** (x; y) genau dann, und nur dann Punkt des Ursprungskreises k mit r = 5 ist, wenn für dessen x- und y-Wert die obige Kreisgleichung erfüllt ist.

Die Mathematik der Dreiecke (und der Kreise) heißt Trigonometrie.

Der Erlanger Gymnasiallehrer **Karl Feuerbach** (1800 – 1834) hat u. a. den Zusammenhang von Dreieck und Kreis untersucht und bewiesen:
Werden bei einem spitzwinkligen Dreieck (alle Innenwinkel sind kleiner als 90°) die drei Seitenhalbierenden durch einen Kreis verbunden, so hat dieser Kreis den halben Radius des Umkreises des Dreiecks.
Dieser kleine Kreis schneidet jede Dreiecksseite in einem weiteren Punkt.
Wird ein solcher Punkt mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks verbunden, so bildet diese Gerade mit der Dreieckseite einen rechten Winkel; das heißt sie bildet die Höhe des Dreiecks auf dieser Seite.

2.6 **Am runden Tisch** kann dieser Sachverhalt nachvollzogen werden.

Karl Friedrich Gauß bewies 1796 die Konstruierbarkeit des **17-Ecks** mit **Zirkel** und **Lineal**.

2.7 **Auf der DDR-Briefmarke zu seinem 200. Geburtstag** ist dies symbolisch dargestellt.

Gauß gab jedoch nur die beweisende Formel an, eine geometrische Konstruktion zu erdenken, war ihm offensichtlich nicht wichtig.

2.8 **Die 17-eckige Tafel** zeigt eine Konstruktionslösung von Uli Gaenshirt, zu deren Verständnis im Prinzip die Kenntnis des **Höhensatzes des Euklid** ausreichend ist.

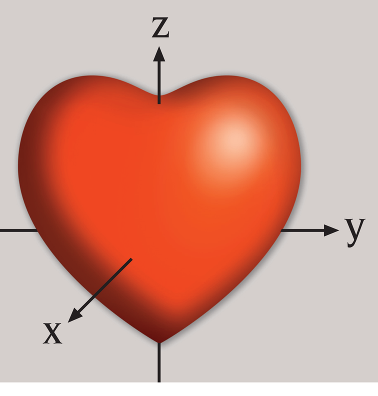
Der Höhensatz wird durch ein ganzzahliges Beispiel illustriert, das auf den Seitenverhältnissen 3 : 4 : 5 beruht.
Die Anwendung dieses Satzes macht das Ziehen einer **Wurzel** mit **Zirkel** und **Lineal** möglich, indem man für die Strecke **p** oder **q** die Länge **1** festlegt.

Anwendung findet die Trigonometrie heutzutage u. a. in Kräfteberechnungen mit **finiten Elementen**.

2.9 **Das Bildbeispiel aus einer Forschungsarbeit von Georg Umgiesser** zeigt die Hydrodynamik in der Bucht von Venedig als Stärke der Meeresströmung in Folge des Tidenhubs (Unterschied des Wasserstandes zwischen Ebbe und Flut).

»Form & Formel«

TEIL 3



Rechteck, Quader, Flächendiagonale, Raumdiagonale. Die Grundform des orientierten Raums ist der Quader.

Ein **Quader** hat sechs **rechteckige** Seitenflächen; jede von ihnen kann aus zwei identischen, rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt werden. Quader unterscheiden sich voneinander durch ihre **Größenordnung** und ihre **Proportionen**.

Betrachten wir ein Beispiel aus dem Inneren der **Cheops-Pyramide**:

3.1 **Die Königskammer** in deren Mitte ist quaderförmig.

Für ihre Proportionen gilt:
Die Grundfläche der Kammer ist ein **Doppelquadrat**
mit einer Länge von genau **20** Königsellen
und einer Breite von genau **10** Königsellen.
Die Diagonale der Wandfläche einer Schmalseite misst genau **15** Königsellen.
Wenn diese **Flächendiagonale** genau rechtwinklig zu einer **Längskante** steht, dann misst die **Raumdiagonale** genau **25** Königsellen.

3.2 **Mit einer 12-Knoten-Schnur**, die im Verhältnis 3 : 4 : 5
(d.h. 15 Königsellen : 20 Königsellen : 25 Königsellen) aufgespannt wird, kann die Rechtwinkligkeit des Bauwerks bestätigt werden.

3.3 **Im Modell der Königskammer** ist die Königselle (52,36 cm)
durch ihr Siebtel, die Handbreite (7,48 cm) ersetzt.
Der Modellmaßstab ist also 1 : 7.
Der Knotenabstand der zum Dreieck aufgespannten Knotenschnur ist 37,4 cm (= 5 Handbreiten).

Die **Höhe** der Kammer hat kein ganzzahliges Ellenmaß, doch lassen sich die vertikalen Raumkanten mit dem Satz des Pythagoras zu

$\sqrt{5}$ x 5 Königsellen berechnen.

Für die **Diagonale** der Grundfläche ergibt sich eine Länge von

$\sqrt{5}$ x 10 Königsellen.

Die zwischen zwei diagonal gegenüberliegenden vertikalen Kanten aufgespannte Fläche ist somit ebenso wie die Grundfläche ein **Doppelquadrat**.
Der Knotenabstand der zum Doppelquadrat aufgespannten Knotenschnüre ist um den Faktor $0{,}5\sqrt{5}$ länger als der Knotenabstand der zum Dreieck aufgespannten Schnur.

Es existieren auch **Quader**, **deren Länge**, **Breite und Höhe gleichermaßen ganzzahlig** sind, ebenso wie die Raumdiagonalen. Zum Beispiel der Quader mit einem Seitenlängenverhältnis von 3 : 4 : 12, bei dem die Raumdiagonale im Verhältnis zu 13 steht.

3.4 **Das große blaue Würfelobjekt** basiert auf diesen Maßverhältnissen.

Allgemein gilt für die **Raumdiagonale d** eines Quaders mit den Seitenlängen
a, b und c: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, hier also $13^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$.
Diese Gleichung kann wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ auch
auf das Dreiecksverhältnis $13^2 = 5^2 + 12^2$ zurückgeführt werden.

3.5 **Am Stabmodell** können noch weitere Varianten **ganzzahliger Raum- und Flächendiagonalen** abgelesen und nachgerechnet werden:
Am Turm des Stabmodells befindet sich die mittlere grüne Murmel 8 Einheiten in vertikaler *z*-Richtung über dem Ursprung des *x*-*y*-*z*-Koordinatensystems.12 Einheiten in *x*-Richtung und 9 Einheiten in *y*-Richtung vom Ursprung entfernt befindet sich in der Ebene ebenfalls eine grüne Murmel.
Mit dem 17 Einheiten langen Stab lassen sich die beiden Murmeln genau verbinden.
Die rechnerische Überprüfung zeigt, dass dies exakt stimmt:
$8^2 + 12^2 + 9^2 = 17^2$.
Wegen $9^2 + 12^2 = 15^2$ lässt sich diese Raumdiagonalengleichung auf die Gleichung
$8^2 + 15^2 = 17^2$ für ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Seitenlängenverhältnis von 8 : 15 : 17 zurückführen.
Das ist jenes Dreieck, das sich vertikal unter dem 17-Einheitenstab befindet.

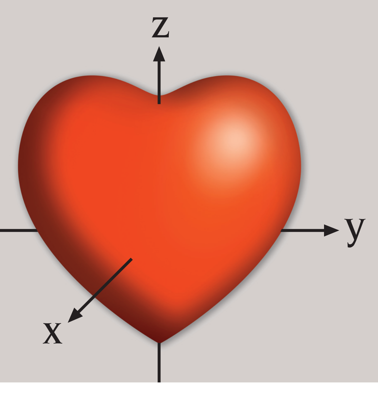
Die ganzzahlige Raumdiagonalengleichung $8^2 + 4^2 + 8^2 = 12^2$ (ebenfalls als Verbindung grüner Murmeln zu finden) beinhaltet hingegen kein ganzzahliges Dreiecksverhältnis.

3.6 **Das kleine blaue Würfelobjekt** illustriert die Gleichung: $2^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2$

Vermittels dieser Gleichung lässt sich beispielsweise die Frage klären, ob eine Gerüststange von 2,90 m Länge in eine Aufzugskabine passt, die zwei Meter hoch, einen Meter breit und zwei Meter lang ist. Die Gleichung besagt, dass die Raumdiagonale dieser Kabine exakt drei Meter misst.

»Form & Formel«

TEIL 4



Pyramide, Zylinder, Schraubung, Kegel, Kegelschraubung. Die Erzeugung räumlicher Grundformen aus den ebenen Grundformen.

Die ägyptische Pyramide wird aus **4** identischen **gleichschenkligen Dreiecken** auf **quadratischem Grundriss** gebildet. Sie gehört zu den **Polyedern** (Vielflächnern), wie alle ausschließlich aus ebenen Flächen zusammengesetzten Körper genannt werden.

Die ägyptischen Pyramiden unterscheiden sich durch die **Steigung** ihrer Dreiecksflächen.
Die Steigung kann über ein Steigungsdreieck beschrieben werden. Es wird aus den folgenden **3** Strecken gebildet:
von der Mitte einer Grundseite zur Spitze der Pyramide (**ansteigend**)
von der Spitze zum Mittelpunkt des Grundquadrats (**lotrecht**)
und von dort zur Grundseitenmitte zurück (**horizontal**).
Diese 3 Strecken bilden ein **rechtwinkliges Dreieck**.

Bei der **Chephren-Pyramide** ist das Verhältnis dieser Dreieckseiten 5 : 4 : 3.

Bei der **Cheops-Pyramide** ist das Verhältnis der Dreieckseiten sehr genau $\tau : \sqrt{\tau} : 1$ (mit $\tau = 1{,}618...$; vgl. „Goldener Schnitt“).

Dieser Umstand ist jedoch vermutlich auf ein praktisch angewandtes Steigungsverhältnis von 14 : 11 zurückzuführen, welches bis auf 3 Stellen hinter dem Komma $\sqrt{\tau} : 1$ entspricht.
Auch das Verhältnis $4/\pi : 1$ ($\pi = 3{,}14159...$) entspricht dem Verhältnis 14 : 11 sehr genau.

4.1 **Auf der Grafik zum Steigungsdreieck der Cheops-Pyramide** werden diese drei Steigungsvarianten für die Pyramidengröße berechnet.

4.2 **Im Modell der Cheops-Pyramide**, das im Maßstab 1 : 600 ausgeführt ist, betragen die Abweichungen der drei Verhältnisse voneinander nur ca. 0,1 mm.
An der beweglichen Schnur kann man die fast vollkommene Maßgleichheit nachvollziehen.

Mit ihren rein geometrischen Methoden hielten die Alten Ägypter möglicherweise diese drei einander sehr ähnlichen Verhältnisse für ein „Urverhältnis“.

Ein **Zylinder** entsteht, wenn ein **Rechteck** um seine **Mittellinie rotiert**.
Er kann vertikal als **Säule** (oder Halbsäule) und horizontal als **Gewölbe** gestaltet werden.

4.3 **Im Hauptschiff der Abteikirche von Payerne** mit seinen Halbsäulen und Tonnengewölben sind beide Elemente in idealer Weise miteinander verbunden.

Die **Wendeltreppe** ist geometrisch eine **Schraubung in einem Zylinder**.
Jede Stufe ist gleich, wobei ihr oberes Auflager gegenüber ihrem unteren um einen bestimmten Winkel um die Zylinderachse gedreht wird.

4.4 **Bei der Doppelwendeltreppe im Grazer Schloss** ist eine rechtsdrehende Treppe mit einer linksdrehenden kombiniert.
Hier werden die Stufen nicht von einer massiven zentralen Säule getragen, sondern von einer offenen Spindel, wobei der gekrümmte Handlauf in jeder Stufe mit eingearbeitet ist.

Die Herausarbeitung eines gekrümmten Handlaufes aus einem Block, dessen Lage zur Materialersparnis entlang der Wendellinie gewählt wird, gehört zu den anspruchsvollsten Aufgaben der Steinbaukunst.

4.5 **Die Wendeltreppe im Mergentheimer Schloss und die dazugehörige Konstruktionszeichnung** des Handlaufes geben hiervon eine Vorstellung.
Die beiden Holzschnitte sind Breymanns Baukonstruktionslehre von 1903 entnommen.

Der Kegel entsteht, wenn ein gleichschenkliges **Dreieck** um die **Höhe** auf seiner Grundseite **rotiert**.

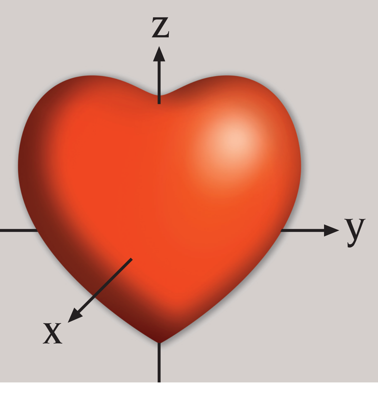
4.6 Wie die Briefmarke zum Gedenken an seinen 500. Geburtstag zeigt, umwand **Wenzel Jamnitzer einen Kegel mit Schraublinien**; diese legen sich regelmäßig ansteigend bis zur Kegelspitze um den Kegelkörper.

4.7 **Der Schneck** aus Albrecht Dürers „Underweysung“ ist dagegen eine Schraublinie mit zur Spitze hin immer steiler werdender Steigung.

4.8 **Am Kegelobjekt** kann nachgeprüft werden:
Wird eine Schnur um den Kegel gewickelt und gespannt, so kann ihre Steigung hierbei nach anfänglichem Ansteigen sogar wieder abfallen.
Dennoch zeigt sich, dass der Verlauf der gespannten Schnur auf der abgewickelten Kegelmantelfläche in jedem Fall eine Gerade ist, also die **kürzeste Verbindung** zwischen zwei Punkten.

»Form & Formel«

TEIL 5



Kugel, Kugelschale, Halbkugel, Kuppel, Sphäre. Die sparsamste räumliche Grundform ist die Kugel.

Alle Sterne und größere Planeten haben aufgrund gravitativer Kräfte annähernd Kugelgestalt.
Planeten mit erkalteter Oberfläche haben eine **Kugelschale**, wie z. B. die **Erde**.
Das schalenförmige Bauprinzip hat sich in der Natur auch im kleineren Maßstab hervorragend bewährt – z. B. bei Eiern, Kokosnüssen und Melonen.
Das Geheimnis der Kugel liegt darin: Von allen Körpern hat sie – im Verhältnis zu ihrem Volumen – die kleinste Oberfläche; sie verzichtet auf „verschwenderische“ Ecken und bietet Kräften von außen den geringsten Widerstand.

5.1 **Das Gemälde von Giovanni Paolo Panini (1691 – 1765)** zeigt das 1.900 Jahre alte **Pantheon in Rom**.
Die Innenseite seiner **Kuppelschale** ist eine **Halbkugel**.

Ihr Durchmesser von gut 43 Metern entspricht gleichzeitig ihrer Höhe, d.h. die zur Kugel vervollständigte Kuppel würde genau auf dem Boden aufliegen.

5.2 **Im Aufriss** ist der entsprechende Kreis eingezeichnet.

Die Kugeloberfläche, auch **sphärische Fläche** genannt, ist geometrisch recht schwierig zu handhaben. Sie lässt sich nicht, wie die Zylinder- oder die Kegelmantelfläche, auf die Ebene abwickeln, da sie **in allen Richtungen gleichmäßig gekrümmt ist**: Allen Landkartenzeichnern bereitet sie Alpträume.
Dennoch lässt sich eine Kugel mit dem Radius **r** in einem x-y-z-Koordinatensystem relativ einfach beschreiben:
Es sind nämlich all jene Punkte **P Oberflächenpunkte** der Kugel, deren x-y-z-Koordinaten die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ erfüllen.
(vgl.: $r^2 = x^2 + y^2$ beim Kreis).

5.3 **Im Kugelmodell**, dessen Gesamtaufbau an die Pantheon-Architektur angelehnt ist, berührt der bewegliche Kreissegmentbügel mit Radius r = 65 cm die in den Eckpunkten der Holzquader positionierten ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung.
Die x-Werte und die y-Werte der touchierten Eckpunkte können am Raster abgelesen und somit die vertikalen z-Werte ausgerechnet werden:

$z = \sqrt{65^2 - x^2 - y^2}$ (Die Gleichung ist nach z aufgelöst).

Der Fußboden des Pantheons besitzt übrigens tatsächlich ein Quadratraster, welches den Grundrisskreis in 16 Eckpunkten exakt berührt!
Die Konstruktion beruht auf der Gleichung $11^2 + 3^2 = 9^2 + 7^2$. Aus dieser Gleichung folgt, dass sowohl zwei Rechtecke aus jeweils 3 mal 11 Rasterquadraten, als auch zwei aus jeweils 7 mal 9 Rasterquadraten in denselben Grundrisskreis exakt einbeschrieben werden können (vgl. weisse Bodenplatte im Kugelmodell).
Möglicherweise bildeten hier die gestalterische Faszination exakter Passungen und die vermessungstechnischen Kontrollmöglichkeiten eine Symbiose.

Das Jantar Mantar in Jaipur in Indien, im 18. Jh. von **Maharaja Jai Singh II** erbaut, ist eine wunderbare astronomische Anlage.
Jai Prakash Yantra heißt der Teil der Anlage, der aus zwei in den Boden eingelassenen **Halbkugeln** aus sphärisch geformten Marmorplatten besteht.
An den Stellen, an denen in der einen Halbkugel die Marmorplatten zum Zwecke der Begehbarkeit ausgespart sind, sind sie in der anderen Halbkugel jeweils montiert.
Jedes Himmelsobjekt kann dadurch aus einer der Halbkugeln durch eine der Lücken zwischen den Marmorplatten über eine in den **Halbkugelmittelpunkt gespannte Fadenkreuzmarkierung** ersehen werden.
Man markiert die ersehene Stelle, also die Verlängerung der Geraden Stern-Halbkugelmittelpunkt auf der Sphärenlücke, mit einem kleinen Fadenkreuz und überträgt dann damit die Position auf die mit einem Maßliniensystem versehene Marmorplatte der anderen Halbkugel.
Durch die Halbkugelform lassen sich Positionen und Wanderungen von Himmelsobjekten ohne Verzerrung und maßstabsgetreu dokumentieren.

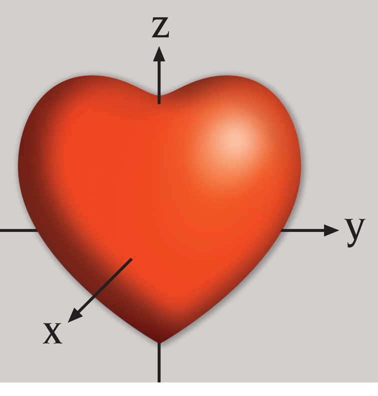
5.4 **An dem kleinen Plexiglasmodell** kann man sich das Prinzip klarmachen, indem man durch dieses das

5.5 **Jupiterphoto** anpeilt.

5.6 **Die beiden Abbildungen des Jai Prakash Yantra** sind dem 2001 im Prestel-Verlag erschienenen Buch „Cosmic Architecture in India“ von Andreas Volwahsen entnommen.

»Form & Formel«

TEIL 6



Drehsymmetrie, Spiegelsymmetrie, ikosaedrische Symmetrie. Symmetrien der Formen in der Ebene und im Raum

Symmetrie ist die Eigenschaft einer Form, durch **Drehung** oder **Spiegelung** in sich selbst überführt werden zu können.

Der Kreis ist die **höchstsymmetrische Form der Ebene**.
Man kann ihn in beliebigem Winkel um seinen Mittelpunkt drehen oder über seinen Durchmesser spiegeln, ohne dass er seine Form verändert.

Der Buchstabe **J** hat keine symmetrischen Eigenschaften, das **E** hingegen erscheint nach einer Spiegelung über seinen mittleren Querbalken unverändert. Das **H** hat einen **Drehsymmetriepunkt** (180°) auf der Mitte seines Querbalkens und zwei sich dort rechtwinklig schneidende **Spiegelgeraden**.

Das Symmetriekonzept lässt sich auf **periodische Anordnungen** ausdehnen.
Das Karopapier ist nach einer Drehung um **90°** immer noch eines.
Man gibt ihm die Symmetriegruppenbezeichnung **p4m**, **p** für **p**rimitive cell (im Sinne von „einfache Zelle", im Gegensatz zu **c** für **c**entered cell, der „zentrierten Zelle"), **4** für die **4**-fachen Drehpunkte und **m** für das Vorhandensein von Spiegelgeraden (**m**irror).

Die **Parkettierungstheorie** der Ebene unterscheidet **17 ebene Symmetriegruppen**.
Sie untersucht die Möglichkeiten, in unbegrenzter Wiederholung aus Elementarzellen symmetrische „Parkette" zu bilden.

6.1 **Im Gruppenbild** sind 8 dieser 17 Gruppen dargestellt.
Der Buchstabe **g** bezeichnet dort eine **Gleitspiegelgerade**, an der entlang gleichzeitig gespiegelt und verschoben werden muss, um das Abbild mit dem Urbild zur Deckung zu bringen.

Die Gleitspiegelgerade **g** wird unterbrochen fett dargestellt, im Gegensatz zur Spiegelgeraden **m**, die fett dargestellt wird.

Im islamischen Kulturkreis war die Kunst des Flächenornaments bereits im Mittelalter sehr hoch entwickelt. Da nach der islamischen Tradition die Abbildung von lebendigen Dingen verboten war, wurden z. B. Moscheefußböden großflächig durch schier endlose Spiegelung/Schachtelung kleiner Elemente höchst lebendig gestaltet.

6.2 **Das Ornamentbeispiel** gehört zur Symmetriegruppe **p6**.

Die **Kristallographie** untersucht die atomare periodische Ordnung im Raum.
Es können **230** räumliche Punktgruppen unterschieden werden.
Die Natur kann für jede dieser Gruppen ein kristallines Beispiel liefern.

Die **„5 platonischen Körper"** sind **Polyeder** (= „Vielflächner"), die **aus gleichen regelmäßigen Vielecken so zusammengesetzt** sind, dass in jeder Ecke die gleiche Anzahl an Vielecken zusammentrifft:

der **Tetraeder** aus **4** Dreiecken, der **Oktaeder** aus **8** Dreiecken, der **Ikosaeder** aus **20** Dreiecken, der **Dodekaeder** aus **12** Fünfecken und der **Würfel** aus **6** Quadraten

6.3 **Im Seilmodell** sind die ersten drei ineinandergeschachtelt.

In diesen hochsymmetrischen räumlichen Objekten gibt es **Spiegelebenen** und **Drehachsen**.
Die **vier Raumdiagonalen** des Würfels sind beispielsweise seine **3-fachen** Drehachsen, d.h. nach einer Drehung eines Würfels um 120° um eine dieser Achsen bietet er wieder exakt den gleichen Anblick wie zuvor.

6.4 **Die Spiegelwürfelecke** „verachtfacht" jede hineingebrachte Form:
Das gleichseitige Dreieck verwandelt sie in einen Oktaeder.
Der Viertelzylinder wird zu einem doppelt so langen Vollzylinder ergänzt.

Viele Künstler wurden von **Leonardo da Vincis** (1452 – 1519) Zeichnungen geometrischer Körper inspiriert.

6.5 **Auf der Intarsientafel des Giovanni da Verona** (1457 – 1525)
ist das mittlere Objekt ein Ikosaeder, das untere ein abgestumpfter **Ikosaeder**, ein „Fußball".
Beide Formen sind detailgenau von Leonardo übernommen.
Ist die Dreidimensionalität dieser Holzeinlegearbeit nicht verblüffend?

Der Nürnberger Goldschmied Wenzel Jamnitzer (1508 – 1585) hat sich ausführlich mit der Darstellung regelmäßiger Körper befasst.

6.6 **Sein „Himmelsobjekt"** aus dem Werk „Perspectiva Corporum Regularium" basiert ebenfalls auf dem abgestumpften Ikosaeder.

6.7 **Das Spiegelpult** erzeugt mit seinen drei (nicht gleichseitigen!) Spiegeln eine **ikosaedrische Symmetrie**, d.h. eine hineingebrachte Teilform wird „verzwanzigfacht", sodass aus dem hölzernen zwanzigsten Teil des „Himmelsobjektes" durch Spiegelung das gesamte erscheint.
(Das hölzerne Teilstück ist zugunsten der Transparenz geringfügig modifiziert.)

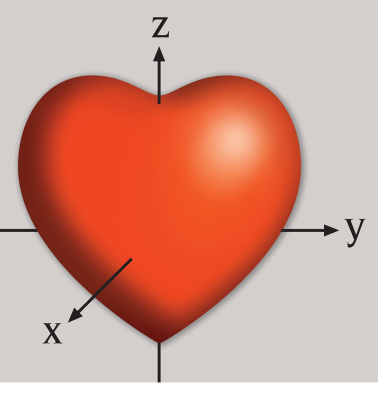
6.8 **Jamnitzers Tetraederfraktal** erscheint wie eine Vorahnung moderner Mathematik.

Alle hier gezeigten Polyeder haben eines gemeinsam: die Gültigkeit der **Eulerschen Ecken-Kanten-Flächen-Formel** $e - k + f = 2$. Hier ist nachzählen angesagt!

6.9 Anlässlich seines 200. Todestages würdigte die DDR 1983 den großen Mathematiker **Leonhard Euler mit einer Briefmarke**, auf der die Entdeckung dieser Formel anhand eines Ikosaeders verbildlicht ist.

»Form & Formel«

TEIL 7



Kegelschnitte, algebraische Flächen. Algebraische Formen in der Ebene und im Raum.

Eine algebraische Form auf der Ebene heißt **Kurve**.

Bereits vorgestellt wurde der **Kreis**, eine **geschlossene Kurve** mit der Formel (mathematisch: Gleichung): $r^2 = x^2 + y^2$

bzw. nach Teilung durch r^2 beiderseits des Gleichheitszeichens: $1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$

Der Kreis gehört zu den **Kegelschnitten**.
Er entsteht als **horizontaler** Schnitt durch einen stehenden Kegel.

Eine Ellipse entsteht, wenn man die horizontale Schnittebene leicht **kippt**.
Wird ein x-y-Koordinatensystem so auf die Ellipse gelegt, dass beide Achsen die Ellipse jeweils symmetrisch teilen, so hat die Ellipse in diesem zentriert gewählten Koordinatensystem die Gleichung:

$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, wobei a und b der kleinste bzw. der größte Durchmesser auf der x- bzw. y-Achse sind.

Je weiter man die Kegelschnittebene kippt, desto schlanker wird die Ellipse.

Eine **Parabel** entsteht, wenn man die Ebene so weit kippt, dass sie parallel zu einer am Kegel anliegenden Ebene liegt.
Die Parabel hat, bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems, die Gleichung: $y = a\,x^2$.

7.1 **Das Kegelbügelmodell** zeigt, warum diese Kegelschnittform eine Parabel, also eine Potenzfunktion zweiten Grades ist.
Eine solche Potenzfunktion (mit $a = 1$) ordnet in einem x-y-Koordinatensystem jedem x-Wert einen y-Wert zu, der das Quadrat des x-Wertes ist.
Die Punkte P(1; 1), Q(2; 4), R(3; 9), S(-2; 4) und T(1,5; 2,25) sind also Punkte der Parabel $y = x^2$, wobei zu beachten ist, dass im Modell die Parabel liegt, d.h. die x-Achse wäre hier vertikal und die y-Achse horizontal.
Die Maßeinheit ist der Dezimeter (= 10 cm).
Unter Anwendung des Höhensatzes lässt sich nun verstehen, warum dieser Kegelschnitt eine Parabel sein muss.
Zugegeben, ganz einfach ist das nicht.

Kippt man die Schnittebene noch etwas **steiler**, so wandelt sich die Parabel zur **Hyperbel**.
Diese hat, wiederum im geeignet gewählten Koordinatensystem, die Gleichung:

$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

oder auch, im Spezialfall einer vertikal gelegenen Schnittebene, einem Öffnungswinkel des Kegels von 90° und bei einer um 45° gedrehten Lage des Koordinatensystems die einfachere Gleichung:

$y = a\,\frac{1}{x}$

7.2 **In der Lichtkegelkammer** können diese drei Kegelschnittformen durch Drehung des Laserlichtkegels eingestellt werden.

Johannes Kepler (1571 – 1630) fand heraus, dass die **Planetenbahnen nicht genau kreisförmig sind**, **sondern Ellipsen** darstellen.

Das **frei hängende Seil** scheint eine Parabel zu sein, die Form folgt jedoch in Wirklichkeit der mathematisch sehr viel schwierigeren **Kettenlinie**.
Wird das Seil jedoch, wie bei einer **Hängebrücke**, in horizontal gleichmäßigen Abständen mit Gewichten belastet, die ein Vielfaches seines Eigengewichtes betragen, nähert sich der Verlauf des Seils tatsächlich dem einer **Parabel** an.

7.3 **Im Hängemodell** kann man die unterschiedlichen Verläufe einer frei hängenden Kette und eines horizontal regelmäßig belasteten Seils erkennen.

Eine algebraische Form im **Raum** heißt **algebraische Fläche**.
Die Einheitskugel (Radius $r = 1$) ist eine **geschlossene Fläche** und hat die Gleichung:

$1 = x^2 + y^2 + z^2$.

Will man diese Kugel in Richtung der z-Achse auf die Hälfte stauchen, formt man die Gleichung um zu:

$1 = x^2 + y^2 + 4z^2$.

Unsere Erde ist durch die Eigenrotation zu einem solchen **Ellipsoid** verformt, allerdings liegt ihr z-Faktor glücklicherweise nur knapp über 1.

7.4 **Das blaue Erdellipsoid mit einem z-Faktor 4** wäre ziemlich beunruhigend.

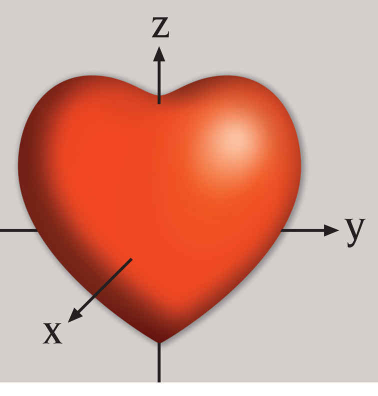
7.5 **Das rote Herz** und die

7.6 **goldene Metamorphose**, sind mit einem vom Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach entwickelten Programm erstellt (www.surfer.imaginary2008.de).

7.7 **Die Arbeiten professioneller Computerkünstler** sind mit komplizierteren Programmen erstellt, und entführen uns in sehr fremdartige Welten.

»Form & Formel«

TEIL 8



Fraktal, Penrose-Parkette, Quasikristalle. Selbstähnliche Formen in fraktalen und aperiodischen Strukturen.

Der Name **„Fraktal“** leitet sich vom gebrochenen Charakter der Linienführung dieser Objekte ab.

8.1 **Im Flächenfüllkurvenobjekt** ist die Linie gekräuselt.
Die Feinstruktur entsteht durch die wiederholte (**iterative**) Ersetzung (**Substitution**) einer 90°-Kurve (**Initiator**) durch 25 mit dem Faktor 0,2 verkleinerten Kopien der Kurve (**Generator**).

Initiator: Gehe die naturholzfarbene 90°-Rechtskurve **R** im Untergrund genau auf ihrer Mittellinie vom Start (links) zum Ziel (rechts).

Generator: Starte am selben Punkt, aber gehe die 13 blauen Rechtskurven **R’** (= 0,2 **R**) und die 12 schwarzen Linkskurven **L’**.
Der Weg ist 5 mal so lang wie der Initiatorweg.

1. Iterationsstufe: Starte wieder am selben Punkt, aber ersetze jede blaue Rechtskurve **R’** durch 13 **R”** (= 0,2 **R’**) und 12 **L”**-Kurven in der Reihenfolge des Generators (roter Weg).
Die spiegelverkehrten schwarzen Linkskurven **L’** werden spiegelverkehrt ersetzt.
Dieser rote Weg ist 25 mal so lang wie der Initiatorweg.

Vor dem Start und nach dem Ziel ist die **2. Iterationsstufe** aufgezeichnet, die zwischen Start und Ziel 125 mal so lang wie der Initiatorweg wäre.

Die Bauvorschriften für Fraktale können in unterschiedlicher Weise mathematisch ausgedrückt werden:

8.2 **Das Lindenmayer-Bäumchen**
wird durch den auf der Graphik in mathematischer Sprache notierten **Turtle-Algorithmus** generiert. Die Graphik entsteht dadurch, dass einer Schildkröte Lauf- und Drehanweisungen gegeben werden.
Der gelbe **4-fache** Zoom zeigt eine ähnliche Form wie das Bäumchen links, der **16-fache** graue Zoom einen nur noch grob ähnlichen Umriss.
Erst in höherer Iterationsstufe und Bildauflösung wären die beiden Zoombilder mit dem Urbild fast identisch.
Diese Existenz gleicher Bildausschnitte in verschiedenen Größenordnungen wird **Selbstähnlichkeit** genannt und charakterisiert die meisten Fraktale.

8.3 **Der Barnsley-Farn**,
von Ulli Schwebinghaus generiert, bedarf einer kaum längeren Erzeugungsvorschrift.
Von einem natürlichen Farnblatt ist er kaum zu unterscheiden.

8.4 **Die Mandelbrotmenge** (gelb) ist die Menge derjenigen **komplexen Zahlen c** der komplexen Ebene **C**, die bei wiederholter Einsetzung in den Term $z^2 + c$ nicht ins Unendliche fliehen.
Bei der wiederholten Einsetzung wird jeweils das Vorgängerergebnis des Terms $z^2 + c$ als neuer z-Wert eingesetzt (**Rekursionsformel**: $z_{n+1} = z_n^2 + c$).
Der **Rand** dieser Menge zeigt trotz der extrem kurzen Erzeugungsvorschrift eine wunderbare, hochkomplexe, **selbstähnliche Formenwelt**.

Die **Penrose-Parkette** werden ebenfalls durch relativ einfache Substitutionsvorschriften erzeugt. Das heißt, ihre **geometrischen Bausteine** werden schrittweise durch bestimmte Anordnungen verkleinerter Kopien ersetzt, sodass im Ergebnis eine **aperiodische** Feinstruktur mit z.B. **periodisch nicht möglicher** fünf- bzw. zehnfacher (**dekagonaler**) Symmetrie entsteht.

8.5 **Im „Japanischen Meer“** hat das Getier exakt die gleichen Eckpunkte wie das zugrundeliegende dekagonale (= zehneckige) Penrose-Rhomben-Parkett, das aus zwei verschiedenen Bausteinen besteht.
Die Kantenstruktur ist allerdings bestialisch modifiziert.

Dan Shechtman u. a. entdeckten **1982** Festkörper, deren atomarer Aufbau den Penrose-Strukturen entspricht.
Diese werden heute allgemein **Quasikristalle** genannt.
Zur mathematischen Modellierung eines fehlerfreien **Wachstums von Quasikristallen** bedarf es zur Strukturerzeugung anstatt der Substitutionsvorschriften sogenannter **Wachstumsformeln**.

8.6 **Die erste perfekt arbeitende rekursive Wachstumsformel**
für dekagonale Strukturen wurde von Uli Gaenshirt und Michael Willsch auf der Aperiodic 06 in Zao, Miyagi, Japan vorgestellt und 2007 unter dem Titel **„ ... the quasiperiodic succession“** im „Philosophical Magazine“ veröffentlicht (dieses erschien zum ersten Mal 1798).

8.7 **Das Sukzessionsprinzip**
wird in der zweigeteilten Graphik anschaulich gemacht:
Der obere Teil zeigt das
Wirkungsprinzip der Sukzession in einer Raumrichtung.
Der untere Teil zeigt die
Anwendung auf ein dekagonales Rhomben-Parkett.

8.8 **„Der Clown“** von Peter Angermann ist eine ausgezeichnete Umsetzung des fraktalen Prinzips in der bildenden Kunst. (Leihgabe der Artothek Nürnberg e. V.)